

III. országos magyar matematikaolimpia
XXX. EMMV
megyei szakasz, 2020. január 18.

V. osztály

1. feladat. Anna 1-től kezdve, sorban írja a természetes számokat: 1, 2, 3,
Melyik számot írja, ha a 2020. számjegynél tart? Melyik a 2020. számjegy?

Koczinger Éva, Szatmárnémeti

Megoldás. A következőket vehetjük észre:

1-től 9-ig 9 darab egyjegyű szám van, ez összesen 9 számjegy.

10-től 99-ig 90 darab kétjegyű szám van, ez összesen 180 számjegy.

100-tól 999-ig 900 darab háromjegyű szám van, ez összesen 2700 számjegy. (3 pont)

Mivel $9 + 180 + 2700 > 2020$, ezért nem kell az összes háromjegyű számot leírni.

Tehát Anna háromjegyű számnak megfelelő számjegyből $2020 - 189 = 1831$ számjegyet írt le.

(2 pont)

Az 1831-et hárommal osztva a hányados 610, a maradék 1. Ez azt jelenti, hogy Anna 610 darab háromjegyű számot írt le és még egy számjegyet. (2 pont)

Mivel 100-tól 709-ig 610 darab szám van, így a 2020. számjegy a 710-ben van és ez a számjegy a 7-es. (2 pont)

Hivatalból

(1 pont)



2. feladat. Igazold, hogy

a) $2^{2020} - 2^{2019} - 2^{2018} - 2^{2017}$ nem teljes négyzet;

b) $2^{2020} - 2^{2019} - 2^{2018} - \dots - 2^{1008}$ teljes négyzet és teljes köb!

Nagy Örs, Kolozsvár

Megoldás. a) $2^{2020} - 2^{2019} - 2^{2018} - 2^{2017} = 2^{2017} \cdot (2^3 - 2^2 - 2 - 1) = 2^{2017}$ (3 pont)

$u(2^{2017}) = u(2^{4 \cdot 504 + 1}) = 2$, tehát 2^{2017} nem teljes négyzet. (2 pont)

A fenti gondolat helyett elég észrevenni, hogy a 2^{2017} páratlan számú 2-es prímtényezőt tartalmaz és ezért nem teljes négyzet.

b)

$$\begin{aligned} 2^{2020} - 2^{2019} - 2^{2018} - \dots - 2^{1008} &= 2 \cdot 2^{2019} - 2^{2019} - 2^{2018} - \dots - 2^{1008} = \\ &= 2^{2019} - 2^{2018} - \dots - 2^{1008} = \\ &= 2 \cdot 2^{2018} - 2^{2018} - \dots - 2^{1008} = \\ &= 2^{2018} - \dots - 2^{1008} = \dots = 2^{1008} \end{aligned} \quad (2 \text{ pont})$$

Mivel $2^{1008} = (2^{504})^2$, ezért 2^{1008} teljes négyzet. (1 pont)

Ugyanakkor $2^{1008} = (2^{336})^3$, ezért 2^{1008} teljes köb. (1 pont)

Hivatalból

(1 pont)



